Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi
Afyon Kocatepe University – Journal of Science and Engineering
https://dergipark.org.tr/tr/pub/akufemubid

Araştırma Makalesi / Research Article
e-ISSN: 2149-3367 DOI: https://doi.org/10.35414/10.35414/akufemubid.1730415
CITE: Afyon Kocatepe University Journal of Science and Engineering. 26(3) (2026) 605-614

Chlodowsky Tipi q-Favard-Szász Operatörlerinin Ağırlıklı Yaklaşım Davranışları

*Makale Bilgisi / Article Info
Alındı/Received: 30.06.2025
Kabul/Accepted: 12.02.2026
Yayımlandı/Published: 03.06.2026

Weighted Approximation Behavior of Chlodowsky-Type q-Favard-Szász Operators

Ümit KARABIYIK*
Necmettin Erbakan Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Bölümü, Konya, Türkiye

© 2026 The Authors | Creative Commons Attribution-Noncommercial 4.0 (CC BY-NC) International License

Öz

Bu çalışmada, q-tamsayılar temel alınarak tanımlanmış genelleştirilmiş bir Chlodowsky tipi Favard-Szász operatörü sunulmuştur. Bu operatörlerin ağırlıklı istatistiksel yaklaşım özellikleri incelenmiş ve davranışları Korovkin tipi yaklaşım teoremi kullanılarak değerlendirilmiştir. Ayrıca, yakınsama hızları, süreklilik modülü ve Lipschitz tipi maksimum fonksiyon aracılığıyla belirlenmiştir. Çalışmada, operatörlerin yerel yaklaşım özellikleri de ele alınarak yakınsama hızını etkileyen faktörler tartışılmıştır. Özellikle, daha önce incelenmemiş olan bu operatörlerin yeni istatistiksel özellikleri araştırılmıştır. Ayrıca, Peetre K-fonksiyonu ve süreklilik modülü gibi araçlar kullanılarak bu yeni operatörlerin yakınsama davranışları kapsamlı bir biçimde değerlendirilmiş ve istatistiksel yaklaşım alanında yeni bulgular sunulmuştur. Matematik, fizik ve mekanik gibi çeşitli alanlarda q-analiz'in artan önemi göz önüne alındığında, bu araştırma, yaklaşım teorisinin q-analizi bağlamında literatüre katkı sağlamaktadır.

Anahtar Kelimeler: *Chlodowsky tipi genelleştirilmiş q-Favard-Szász operatörleri, Yerel yaklaşım, Ağırlıklı yaklaşım, Süreklilik modülü, Peetre'nin K-fonksiyonu, İstatistiksel yakınsama.*

Abstract

In this paper, we introduce a generalized Chlodowsky-type Favard-Szász operator based on q. We investigated the weighted statistical approximation properties of these operators, employing the Korovkin-type approximation theorem to assess their behavior. Additionally, we determine the rates of statistical convergence using the modulus of continuity and the Lipschitz-type maximal function. The study further examines the local approximation properties of these operators, providing insights into the factors that influence the rate of convergence. Specifically, we explore the novel statistical properties of these operators, which have not been studied before. Moreover, we apply tools like the Peetre K-functional and modulus of continuity to offer a comprehensive evaluation of the convergence behaviors of these new operators, presenting new findings in the field of statistical approximation. Given the growing significance of q-calculus in various fields such as mathematics, physics, and mechanics, this research contributes to the existing body of knowledge by extending the understanding of the q-analysis of approximation theory.

Keywords: *Chlodowsky type generalization of the q-Favard-Szász operators, Local approximation, Weighted approximation, Modulus of continuity, Peetres K-functional, Statistical convergence.*

1. Giriş

Son yıllarda, q-analiz alanı; matematik, fizik ve mekanik gibi çeşitli disiplinlerdeki çok yönlü uygulamaları sayesinde dikkate değer bir gelişim göstermiştir. Özellikle yaklaşım teorisi alanında, q-analiz araçlarının kullanımı son on yılda büyük ölçüde artış göstermiştir. Bu gelişmelerin temelinde, klasik Bernstein polinomlarını q-tamsayılar aracılığıyla genişleten Phillips'in öncü çalışması yer almaktadır (Phillips 1997). Bu doğrultuda birçok araştırmacı, pozitif lineer operatörlerin çeşitli q-genelleştirmelerini tanıtmış ve bu operatörlerin yaklaşım davranışlarını incelemiştir (Karaisa 2016, Aral ve Gupta 2010, Atakut 2011, Finta ve Gupta 2009, Büyükyazıcı 2010, Bas.canbaz-Tunca vd. 2014).

Bununla birlikte, araştırmacılar birçok operatörün q-genelleştirmelerinin istatistiksel yaklaşım özelliklerini araştırmışlardır. Bu bağlamda, Kantorovich-Bernstein operatörleri üzerine yapılan çalışmalar (Dalmanoğlu ve Doğru 2010, Radu 2008), q-Baskakov-Kantorovich operatörleri (Gupta ve Radu 2009), q-Szász-Mirakjan operatörleri (Örkçü ve Doğru 2011) ve modifiye q-Stancu-Beta operatörleri (Mursaleen ve Khan 2013) dikkate değer katkılar sunmuştur. Operatörlerin istatistiksel yaklaşımıyla ilgili daha ileri düzeyde bilgiler, Mursaleen ve Alotaibi (2011) ile Karakaya ve Karaisa (2015) çalışmalarında yer almaktadır.

q-analiz çerçevesinde pozitif lineer operatörlerin genelleştirilmiş biçimlerinin inşasına yönelik ilgi, teorik önemi ve potansiyel uygulamaları nedeniyle giderek artmaktadır. Örneğin, Khursheed ve Usta (2022) sıfırdan büyük bir sabit ile parametreleştirilen Szász-Mirakyan operatör sınıfı sunmuş; bu operatörlerin yaklaşım

*Sorumlu Yazar/Corresponding Author: Ümit KARABIYIK e-posta / e-mail: ukarabiyik@erbakan.edu.tr

davranışı, yakınsama özellikleri ve hata sınırlarını süreklilik modülü ve Voronovskaja tipi sonuçlar aracılığıyla analiz etmiştir. Benzer şekilde, Karabıyık vd. (2024), (p,q)-tamsayılar temelinde tanımlanmış iki değişkenli Chlodowsky tipi Bernstein operatörlerini çalışarak, bu operatörlerin yerel ve ağırlıklı yaklaşım özellikleri ile dinamik sistemlerin modellenmesi ve kontrolüne katkı sunmuştur.

Karahan ve Acar (2023) q-Favard-Szász-Mirakjan operatörlerinin max-product tipi bir ailesini geliştirerek, doğrusal olmayan yaklaşımda fonksiyonel yapıyı koruyabilen bir yapı ortaya koymuştur. Daha uygulamalı bir perspektiften bakıldığında, Usta vd. (2021), Szász-Mirakyan operatörlerini kullanarak Volterra integral denklemleri için sayısal bir çözüm yöntemi tasarlamış ve hem teorik yakınsama sınırlarını hem de sayısal sonuçları sunmuştur. Bu çalışmalar, bu çalışmanın temel amacıyla da örtüşmektedir: q-Favard-Szász operatörlerinin Chlodowsky tipi bir genellemesini oluşturmak ve analiz etmek, böylece sınırsız aralıklarda yaklaşım teorisindeki gelişmelere katkı sağlamaktır.

Bu çalışmada, q-tamsayılar temelinde tanımlanan Favard-Szász operatörlerinin Chlodowsky tipi genelleştirilmesini incelenmiştir. Bu yeni operatörlerin ağırlıklı istatistiksel yaklaşım özellikleri, Korovkin tipi bir teorem kullanılarak araştırılmıştır. Ayrıca, süreklilik modülü kullanılarak istatistiksel yakınsama hızı ve bu yeni operatörlere ait bazı yerel yaklaşım sonuçları elde edilmiştir.

Önerilen operatörlerin tanımına zemin hazırlamak amacıyla, öncelikle *q-calculus*'a ait bazı temel tanım ve gösterimlere aşağıda yer verilmiştir. Özellikle, herhangi bir negatif olmayan tam sayı r için, *q-integer* gösterimi aşağıdaki gibidir.

$$[r]_q = \begin{cases} (1-q^r)/(1-q), & q \neq 1 \\ 1, & q = 1 \end{cases}$$

Buradan hareketle, q-faktöriyel aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$[\nu]_q! = \begin{cases} [\nu]_q \cdot [\nu-1]_q \cdot \ldots \cdot [1]_q, \nu \in \mathbb{N} \\ 1, \quad \nu = 0 \end{cases}$$

Ayrıca, q-binomyel katsayıları ise,

$$\begin{bmatrix} \nu \\ \kappa \end{bmatrix}_q = \frac{[\nu]_q!}{[\kappa]_q! \cdot [\nu-\kappa]_q!}$$

eşitliği ile ifade edilmektedir.

Bir fonksiyonun x değişkenine göre q-türevi (literatürde *Jackson türevi* olarak da geçmektedir) aşağıdaki biçimde gösterilir:

$$\left(D_q f\right)(x) = \frac{f(x) - f(qx)}{(1-q)x}, x \neq 0.$$

İki fonksiyonun çarpımına uygulandığında ise q-türev aşağıdaki özdeşliği sağlar:

$$D_q\big(f(x) \cdot g(x)\big) = f(qx) \cdot D_q g(x) + g(qx) \cdot D_q f(x).$$

Çalışmada tanımlanacak olan operatörlerin temelini oluşturan iki q-üstel fonksiyon,

$$e_q^x = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{[\nu]_q!}$$

$E_q^x = \sum_{\nu=0}^{\infty} q^{\nu(\nu-1)/2} \cdot \frac{x^\nu}{[\nu]_q!}$ şeklindedir.

Bu q-üstel fonksiyonların bazı temel özellikleri:

1. $D_q\left(e_q^{ax}\right) = a \cdot e_q^{ax}$
2. $D_q(E_q^{ax}) = a \cdot E_q^{aqx}$
3. $e_q^x \cdot E_q^{-x} = E_q^x \cdot e_q^{-x} = 1$

q-calculus'a ilişkin daha ayrıntılı bilgiler için Aral vd. (2013) ile Kac ve Cheung (2002) numaralı kaynaklara başvurulabilir.

2. Operatörlerin Tanımı ve Formülasyonu

Jakimovski ve Leviatan (1969) çalışmasında Appell polinomları ile ilişkili bir Szász-tipi operatör sınıfı ilk olarak tanıtmış, aynı zamanda bu operatörlerin bazı yaklaşım özelliklerini de incelemişlerdir. İlgili Appell polinomları;

$$g(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu, |z| < R, R > 1 \text{ ve } g(1) \neq 0$$

olmak üzere,

$$g(u).e^{-ux} = \sum_{\kappa=0}^{\infty} p_\kappa(x) \cdot u^\kappa$$

fonksiyon ile karakterize edilir.

Bu yapı temel alınarak, ilgili Szász tipi operatörler Jakimovski ve Leviatan (1969) aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$P_\nu(f;x) = \frac{e^{-\nu x}}{g(1)} \sum_{\kappa=0}^{\infty} p_\kappa(\nu x) \cdot f\left(\frac{\kappa}{\nu}\right).$$

Burada $\nu \in \mathbb{N}$, $x \in [0,\infty)$, $f \in C[0,\infty)$ olmak üzere bu operatörler literatürde Favard-Szász operatörleri olarak adlandırılmaktadır.

Benzer biçimde, Chlodowsky tarafından 1932 yılında klasik Bernstein polinomlarının sınırsız tanım aralığına genelleştirilmiş hali tanıtılmış ve bu yapılar günümüzde Chlodowsky-Bernstein operatörleri olarak bilinmektedir (Chlodowsky 1937). Daha sonra Stypinski bu çalışmaları genişleterek Szász-Chlodowsky operatörlerini önermiş ve analiz etmiştir (Stypinski 1974).

Son yıllarda, Atakut vd. (2014), Favard–Szász operatörlerinin Chlodowsky tipi bir genellemesini aşağıdaki gibi tanımlayarak literatüre kazandırmıştır:

$$P_\nu^*(f;x)=\frac{e^{-\nu x}}{g(1)}\sum_{\kappa=0}^{\infty}p_\kappa\left(\frac{\nu x}{b_\nu}\right)\cdot f\left(\frac{\kappa}{\nu}b_\nu\right).$$

Chlodowsky tipi q-Favard-Szász operatörleri ailesinde, burada b_ν pozitif artan bir diziyi temsil etmekte olup aşağıdaki koşulları sağlamaktadır:

$$lim_{\nu\to\infty}(b_\nu)=\infty,\quad lim_{\nu\to\infty}\frac{(b_\nu)}{\nu}=0.$$

Literatürde birçok çalışmada, bu operatör sınıfının yaklaşım özellikleri incelenmiş ve yakınsaklık hızı süreklilik modülü yardımıyla belirlenmiştir.

Çalışmamızda $0<q<1$ için, q-Favard-Szász operatörlerinin Chlodowsky tipi genellemesi olarak adlandırdığımız yeni operatörleri aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$P_\nu^*(f;q;x)=\frac{E_q^{-\frac{[\nu]_q}{b_\nu}x}}{A(1)}\sum_{\kappa=0}^{\infty}\frac{P_\kappa(q;\frac{[\nu]_q}{b_\nu}x)}{[\kappa]_q!}\cdot f(\frac{[\kappa]_q}{[\nu]_q}b_\nu)\qquad(1)$$

Burada $P_\kappa(q;\cdot)\geq 0$, aşağıdaki üreteç fonksiyon tarafından oluşturulan bir q-Appell polinom kümesidir.

$A(u)=\sum_{\kappa=0}^{\infty}a_\kappa\cdot u^\kappa$ olmak üzere,

$$A(u)\cdot e_q^{\frac{[\nu]_q}{b_\nu}\cdot x\cdot u}=\sum_{\kappa=0}^{\infty}\frac{P_\kappa\left(q;\frac{[\nu]_q}{b_\nu}x\right)\cdot u^\kappa}{[\kappa]_q!}.\qquad(2)$$

3. Ağırlıklı Korovkin Tip Çerçevesi ile İstatistiksel Yaklaşım

Bu bölümde, P_ν^* operatörleri için Korovkin tipi ağırlıklı istatistiksel yaklaşım sonuçları incelenmektedir. Öncelikle, istatistiksel yakınsama kavramını kısaca tanıtılacaktır.

Bir $K\subset\mathbb{N}$ kümesinin doğal yoğunluğu, aşağıdaki şekilde tanımlanır (limit mevcutsa):

$$\delta(K)=\lim_{\nu\to\infty}\frac{1}{\nu}\sum_{\kappa=1}^{\nu}\chi_K(\kappa).$$

Burada χ_K, K kümesinin karakteristik fonksiyonudur.

Bir $x=(x_\kappa)$ dizisi, $\ell\in\mathbb{R}$reel sayısına istatistiksel olarak yakınsıyorsa, her $\varepsilon>0$ için aşağıdaki kümenin yoğunluğu sıfırdır:

$$\delta\{\kappa\in\mathbb{N}:|x_\kappa-\ell|\geq\varepsilon\}=0.$$

Bu tür yakınsama, Fast (1951) tarafından tanımlandığı üzere şu şekilde gösterilir:

$$st\text{-}\lim(x_\kappa)=l.$$

Aşağıda ağırlıklı yaklaşım kavramı ve buna ilişkin temel yapı tanımlanmaktadır.

Bir $\rho_0:\mathbb{R}\to[1,\infty)$ fonksiyonu, eğer sürekli ve

$$\lim_{|x|\to\infty}\rho_0(x)=\infty$$

şartını sağlıyorsa ağırlık fonksiyonu olarak adlandırılır.

Yaygın kullanılan bir örnek olarak $\forall x\in R$ ve $\rho_0(x)\geq 1$ olmak üzere $\rho_0(x)=1+x^2$ fonksiyonunu verebiliriz. $B_{\rho_0}[0,\infty)$ ailesi $[0,\infty)$ aralığında tanımlı ve bir sabit $M_f>0$ için;

$$|f(x)|\leq M_f(1+x^2),\forall x\in[0,\infty)$$

koşulunu sağlayan tüm fonksiyonlardan oluşmaktadır.

Ayrıca, $C_{\rho_0}[0,\infty)$ ile $B_{\rho_0}[0,\infty)$ uzayına ait olan tüm sürekli fonksiyonların içinde sürekli olan fonksiyonların oluşturduğu alt uzayı gösterilmek üzere; $C_{\rho_0}^*[0,\infty))$ uzayı,

$$\lim_{|x|\to\infty}\frac{|f(x)|}{1+x^2}$$

koşulunu sağlayan tüm sürekli fonksiyonlardan oluşan $C_{\rho_0}[0,\infty)$ uzayının bir alt uzayıdır.

Bu uzaya ait norm ise aşağıdaki şekilde verilir:

$$\|f\|_{\rho_0}=\sup_{x\in[0,\infty)}\frac{|f(x)|}{1+x^2}$$

Bu bölümün devamında, teoremlerimizin ispatında gerekli olan aşağıdaki moment tahmini verilmektedir.

Lemma 3.1. $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{x} \in [\mathbf{0}, \infty)$ ve $\mathbf{0} < \boldsymbol{q} < \mathbf{1}$

için aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$P_\nu^*(e_0; q; x) = 1, \tag{3}$$

$$P_\nu^*(e_1; q; x) = x + \frac{e_q^{q\frac{[\nu]_q}{b_\nu}x} \cdot E_q^{-\frac{[\nu]_q}{b_\nu}x} \cdot D_q(A(1))}{A(1)}, \tag{4}$$

$$P_\nu^*(e_2; q; x) = x^2 + \frac{e_q^{q\frac{[\nu]_q}{b_\nu}x} \cdot E_q^{-\frac{[\nu]_q}{b_\nu}x} \cdot \left(qD_q(A(q)) + D_q(A(1))\right)}{A(1)} \cdot x\frac{b_\nu}{[\nu]_q}$$

$$\frac{e_q^{q\frac{[\nu]_q}{b_\nu}x} \cdot E_q^{-\frac{[\nu]_q}{b_\nu}x} \cdot D_q^2(A(1))}{A(1)} \cdot \frac{b_\nu^2}{[\nu]_q^2}. \tag{5}$$

Burada $e_\upsilon(x) = x^\upsilon, \quad \upsilon = 0,1,2.$ Şeklindedir.

İspat. Denklem (2) ve $\boldsymbol{q}$-türev tanımına göre aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$\sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{P_\kappa(q;\frac{[\nu]_q}{b_\nu}x)}{[\kappa]_q!} = A(1) \cdot e_q^{\frac{[\nu]_q}{b_\nu}x},$$

$$\sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{P_\kappa(q;\frac{[\nu]_q}{b_\nu}x)}{[\kappa]_q!} \cdot [\kappa]_q$$

$$= A(1) \cdot \frac{[\nu]_q}{b_\nu} \cdot x \cdot e_q^{\frac{[\nu]_q}{b_\nu}x} + e_q^{q\frac{[\nu]_q}{b_\nu}x} \cdot D_q\big(A(1)\big),$$

$$\sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{P_\kappa(q;\frac{[\nu]_q}{b_\nu}x)}{[\kappa]_q!} \cdot [\kappa]_q^2$$

$$= D_q^2(A(1)) \cdot e_q^{q\frac{[\nu]_q}{b_\nu}x} + \frac{[\nu]_q}{b_\nu} \cdot x \cdot e_q^{q\frac{[\nu]_q}{b_\nu}x} \cdot \big[D_q(A(1) + qD_q(A(q))\big] + A(1) \cdot \frac{[\nu]_q^2}{b_\nu^2} \cdot x^2 \cdot e_q^{\frac{[\nu]_q}{b_\nu}x}.$$

Bu eşitlikler, tanımladığımız operatör tanımıyla birleştirildiğinde sırasıyla;

$$P_\nu^*(e_0; q; x) = \frac{E_q^{-\frac{b_\nu}{[\nu]_q}x}}{A(1)} \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{P_\kappa(q;\frac{b_\nu}{[\nu]_q}x)}{[\kappa]_q!}$$

$$= \frac{E_q^{-\frac{[\nu]_q}{b_\nu}x}}{A(1)} A(1) e_q^{\frac{[\nu]_q}{b_\nu}x} = 1,$$

$$P_\nu^*(e_1; q; x)$$

$$= \frac{E_q^{-\frac{[\nu]_q}{b_\nu}x}}{A(1)} \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{P_\kappa\left(q;\frac{b_\nu}{[\nu]_q}x\right)}{[\kappa]_q!} \cdot \frac{[\kappa]_q}{[\nu]_q} b_\nu$$

$$= \frac{E_q^{-\frac{[\nu]_q}{b_\nu}x} \cdot b_\nu}{A(1)[\nu]_q} \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{P_\kappa(q;\frac{b_\nu}{[\nu]_q}x)}{[\kappa]_q!}$$

$$= \frac{E_q^{-\frac{[\nu]_q}{b_\nu}x} \cdot b_\nu}{A(1)[\nu]_q} \left(A(1) \cdot \frac{[\nu]_q}{b_\nu} x \cdot e_q^{\frac{[\nu]_q}{b_\nu}x} + e_q^{q\frac{[\nu]_q}{b_\nu}x} \cdot \mathcal{D}_q(A(1))\right)$$

$$= x + \frac{e_q^{q\frac{[\nu]_q}{b_\nu}x} \cdot E_q^{-x\frac{[\nu]_q}{b_\nu}} \cdot \mathcal{D}_q(A(1))}{A(1)} \cdot \frac{b_\nu}{[\nu]_q},$$

ve

$$P_\nu^*(e_2; q; x) = \frac{E_q^{-\frac{[\nu]_q}{b_\nu}x}}{A(1)} \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{P_\kappa\left(q;\frac{b_\nu}{[\nu]_q}x\right)}{[\kappa]_q!} \cdot \frac{[\kappa]_q^2}{[\nu]_q^2} \cdot b_\nu^2$$

$$= \frac{E_q^{-\frac{[\nu]_q}{b_\nu}x}}{A(1)} \cdot \frac{b_\nu^2}{[\nu]_q^2} \{\mathcal{D}_q^2(A(1)) \cdot e_q^{q\frac{[\nu]_q}{b_\nu}x}$$

$$+ \frac{[\nu]_q}{b_\nu} x \cdot e_q^{q\frac{[\nu]_q}{b_\nu}} \cdot [q\mathcal{D}_q(A(q)) + \mathcal{D}_q(A(1))] + A(1) \cdot \frac{[\nu]_q^2}{b_\nu^2} x^2 \cdot e_q^{\frac{[\nu]_q}{b_\nu}x}\}$$

$$= x^2 + \frac{e_q^{q\frac{[\nu]_q}{b_\nu}x} \cdot E_q^{-\frac{[\nu]_q}{b_\nu}x} \cdot [q\mathcal{D}_q(A(q)) + \mathcal{D}_q(A(1))]}{A(1)} \cdot \frac{xb_\nu}{[\nu]_q}$$

$$+ \frac{e_q^{q\frac{[\nu]_q}{b_\nu}x} \cdot E_q^{-\frac{[\nu]_q}{b_\nu}x} \cdot \mathcal{D}_q^2(A(1))}{A(1)} \cdot \frac{b_\nu^2}{[\nu]_q^2},$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.2. $\boldsymbol{q}:=(\boldsymbol{q_\nu})$ dizisi her $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{N}$, $\mathbf{0} < \boldsymbol{q_\nu} < \mathbf{1}$ koşulunu sağlayan bir dizidir ve aşağıdaki istatistiksel limitlerin var olduğu kabul edelim.

$$st - lim_{\nu\to\infty}(\tfrac{b_\nu}{[\nu]_q}) = 0, \; st - lim_{\nu\to\infty}(q_\nu) = b. \tag{6}$$

Ayrıca, $f \in C[0,\infty) \cap E$ olmak üzere, burada E uzayı $|f(x)| \leq \alpha e^{\beta x}$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ koşulunu sağlayan tüm sürekli fonksiyonlardan oluşsun.

Bu durumda, P_ν^* operatör dizisi, aşağıdaki ağırlıklı istatistiksel yakınsamayı sağlar:

$$st - lim_{\nu\to\infty} \|P_\nu^*(f; q_\nu; \cdot) - f\|_{\rho_0} = 0$$

İspat. İstenen sonucu göstermek için aşağıdaki eşitliğin doğruluğunu kanıtlamak yeterlidir.

$\boldsymbol{\nu = 0, 1, 2}$ olmak üzere,

$$st - lim_{\nu\to\infty} \|P_\nu^*(e_\nu; q_\nu; \cdot) - e_\nu\|_{\rho_0} = 0.$$

Özellikle $\nu = 0$ için, denklem (3) kullanılarak doğrudan

$st - lim_{\nu\to\infty} \|P_\nu^*(e_0; q_\nu; \cdot) - e_0\|_{\rho_0} = 0$ eşitliği elde edilir.

Denklem (4) ve $e_q^{q^{\frac{[\nu]_q}{b_\nu}x}} \cdot E_q^{\frac{-[\nu]_q}{b_\nu}x} \leq 1$ eşitsizliğini kullanılarak,

$$\|P_\nu^*(e_1; q; x) - e_1\|_{\rho_0} \leq \frac{D_q(A(1)}{A(1)} \cdot \frac{b_\nu}{[\nu]_q} \cdot \|e_1\|_{\rho_0}$$

yazılır. $\varepsilon > 0$ sabiti için aşağıdaki kümeleri tanımlayalım:

$$K \coloneqq \{\kappa: \|P_\nu^*(e_1; q_\kappa; x) - e_1\| \geq \varepsilon\},$$
$$K_1 \coloneqq \left\{\kappa: \left(\frac{D_q(A(1)}{A(1)}\right) \cdot \left(\frac{b_\kappa}{[\kappa]_q}\right) \geq \varepsilon\right\}.$$

Bu durumda $K \subseteq K_1$ olur. (6)'ya göre:

$$\delta\{\kappa \leq \nu: \|P_\nu^*(e_1; q; x) - e_1\|_{\rho_0} \geq \varepsilon\}$$

$$\leq \delta\left\{\kappa \leq \nu: \frac{\mathcal{D}_q(A(1))}{A(1)} \cdot \frac{b_\kappa}{[\kappa]_q} \geq \varepsilon\right\} \text{ elde edilir.}$$

Buradan sonuç olarak,

$$st - lim_{\nu\to\infty} \|P_\nu^*(e_2; q_\nu; x) - e_2\|_{\rho_0} = 0.$$

Denklem (5)'ten elde edilen ifadeyle:

$$\|P_\nu^*(e_2; q; x) - e_2\|_{\rho_0} \leq$$

$$\frac{qD_q(A(q)) + D_q(A(1)}{A(1)} \cdot \frac{b_\nu}{[\nu]_q} \cdot \|e_1\|_{\rho_0} +$$

$$\frac{D_q^2(A(1)}{A(1)} \cdot \frac{b_\nu^2}{[\nu]_q^2} \cdot \|e_0\|_{\rho_0}.$$

Yukarıdaki elde edilen sonuçlar yardımıyla $\varepsilon > 0$ için aşağıdaki kümeleri tanımlayalım:

$$V = \{\kappa: \|P_\nu^*(e_2; q_\kappa; x) - e_2\|_{\rho_0} \geq \varepsilon\},$$

$$V_1 = \left\{\kappa: \frac{q_\kappa D_q(A(q)) + D_q(A(1))}{A(1))} \cdot \frac{b_\kappa}{[\kappa]_{q_\kappa}} \geq \varepsilon/2\right\},$$

$$V_2 \coloneqq \left\{\kappa: \frac{D_q^2(A(1)}{A(1)} \cdot \frac{b_\kappa^2}{[\kappa]_{q_\kappa}^2} \geq \varepsilon/2\right\}.$$

Bu durumda $V \subseteq V_1 \cup V_2$ yazılır.

Böylece,

$$\delta\{\kappa \leq \nu: \|P_\nu^*(e_1; q; x) - e_1\|_{\rho_0} \geq \varepsilon\}$$

$$\leq \delta\left\{\kappa \leq \nu: \frac{\mathcal{D}_q(A(1))}{A(1)} \cdot \frac{b_\kappa}{[\kappa]_q} \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

$+\delta(\kappa \leq \nu: \frac{D_q^2(A(1))}{A(1)} \cdot \frac{b_\kappa^2}{[\kappa]_q^2} \geq \frac{\varepsilon}{2})$ elde edilir.

Bu sonuç ve yukarıdaki eşitsizlikten:

$st - lim_{\nu\to\infty} \|P_\nu^*(e_2; q_\nu; x) - e_2\|_{\rho_0} = 0$ sonucuna ulaşılır.

4. Pozitif Lineer Operatörler İçin İstatistiksel Yakınsama Hızları

Bu bölümde, P_ν^* operatörlerinin yakınsama hızı, süreklilik modülü ve Lipschitz tipi uzaylara ait fonksiyonlar yardımıyla incelenmiştir. Öncelikle, $C_B[0,\infty)$ kümesi, $[0,\infty)$ aralığında tanımlı gerçek değerli, sürekli ve sınırlı fonksiyonların kümesi olarak tanımlanır. Bir $f \in C_B[0,\infty)$ fonksiyonu için, ağırlıklı süreklilik modülü, $\delta > 0$ ve $\lambda \geq 0$ olmak üzere;

$$\omega_{\rho_0}(f; \delta) = \sup_{\substack{|x-y|\leq\delta \\ x,y\in[0,\infty)}} |f(x) - f(y)|/(1 + x^{2+\lambda})$$

şeklinde tanımlanır.

Bu fonksiyon; her $f \in C_B[0,\infty)$ için $\forall\, x, y \in [0,\infty)$, $\forall\, \delta > 0$ ve $lim_{\delta\to\infty} \omega_{\rho_0}(f; \delta) = 0$ olmak üzere,

$$|f(x)-f(y)| \le \omega_{\rho_0}(f;\delta)\cdot\left(\frac{|x-y|}{\delta}+1\right).$$

Aşağıda süreklilik modülüne dayanarak P_ν^* operatörlerinin bir fonksiyona belirli bir noktada hangi hızla yaklaştığını nicel olarak ifade eden bir teorem sunulmaktadır.

Teorem 4.1. $q:=(q_\nu)$ dizisinin (6) koşulunu sağladığını ve $x\in[0,\infty)$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, aşağıdaki sonuç geçerlidir:

Burada tüm $f\in C_B[0,\infty)\cap E$ için,

$$\delta_\nu=\frac{(qD_q(A(q))+D_q(A(1))}{A(1)}\cdot\frac{b_\nu}{[\nu]_q}\cdot\|e_1\|$$

$$+\frac{{D_q}^2(A(1))}{A(1)}\cdot\frac{{b_\nu}^2}{{[\nu]_q}^2}\cdot\|e_0\| \qquad (7)$$

olmak üzere;

$$|P_\nu^*(f;q;x)-f(x)|\le 2\cdot\omega_{\rho_0}\left(f,\sqrt{\delta_\nu}\right).$$

İspat. $P_\nu^*(f;q;x)$ operatörünün lineerliği ve monotonluğu kullanılarak,

$$|P_\nu^*(f;q;x)-f(x)|$$

$$\le\frac{E_q^{-[\nu]_q x/b_\nu}}{A(1)}\cdot\sum_{\kappa=0}^{\infty}\frac{P_\kappa(q;\frac{[\nu]_q}{b_\nu}x)}{[\kappa]_q!}\cdot\left|f(\frac{[\kappa]_q}{[\nu]_q})-f(x)\right|$$

$$\le\frac{E_q^{-\frac{[\nu]_q}{b_\nu}x}}{A(1)}\sum_{\kappa=0}^{\infty}\frac{P_\kappa(q;\frac{[\nu]_q}{b_\nu}x)}{[\kappa]_q!}\cdot\omega(f,\delta)\left\{\frac{1}{\delta}\left|\frac{[\kappa]_q}{[\nu]_q}b_\nu-x\right|+1\right\}$$

$$=\left\{\frac{1}{\delta}\cdot\frac{E_q^{-\frac{[\nu]_q}{b_\nu}x}}{A(1)}\sum_{\kappa=0}^{\infty}\frac{P_\kappa(q;\frac{[\nu]_q}{b_\nu}x)}{[\kappa]_q!}(\left|\frac{[\kappa]_q}{[\nu]_q}b_\nu-x\right|+1)\right\}\omega(f,\delta).$$

Toplam terimlerine Cauchy–Schwarz eşitsizliği uygulandığında aşağıdaki üst sınırlama elde edilir.

$$\sum_{\kappa=0}^{\infty}\frac{P_\kappa(q;\frac{[\nu]_q}{b_\nu}x)}{[\kappa]_q!}\left|\frac{[\kappa]_q}{[\nu]_q}b_\nu-x\right|^2$$

$$\le\left(\sum_{\kappa=0}^{\infty}\frac{P_\kappa(q;\frac{[\nu]_q}{b_\nu}x)}{[\kappa]_q!}\right)^{1/2}\left(\sum_{\kappa=0}^{\infty}\frac{P_\kappa(q;\frac{[\nu]_q}{b_\nu}x)}{[\kappa]_q!}\left(\frac{[\kappa]_q}{[\nu]_q}b_\nu-x\right)^2\right)^{1/2}$$

Yukarıdaki eşitsizlik ile (1) numaralı bağıntının birlikte değerlendirilmesiyle aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$|P_\nu^*(f;q;x)-f(x)|$$

$$\le\omega(f,\delta)\left\{1+\frac{1}{\delta}\left[\frac{E_q^{-\frac{[\nu]_q}{b_\nu}x}}{A(1)}\sum_{\kappa=0}^{\infty}\frac{P_\kappa(q;\frac{[\nu]_q}{b_\nu}x)}{[\kappa]_q!}\left(\frac{[\kappa]_q}{[\nu]_q}b_\nu-x\right)^2\right]^{1/2}\right\}$$

$$=\omega(f,\delta)\left\{1+\left[\frac{1}{\delta}\cdot P_\nu^*((s-e_1)^2;q;x)^{1/2}\right]\right\}.$$

Lemma 3.1 ve $e_q^{\frac{q[\nu]_q}{b_\nu}x}\cdot E_q^{-\frac{[\nu]_q}{b_\nu}x}\le 1$ eşitsizliği kullanılarak,

$$P_\nu^*((s-e_1)^2;q;x)$$

$$\le\frac{(qD_q(A(q))+D_q(A(1))}{A(1)}\cdot\frac{b_\nu}{[\nu]_q}.\|e_1\|$$

$$+\frac{D_q^2(A(1))}{A(1)}\cdot\frac{b_\nu^2}{[\nu]_q^{2_2}}\cdot\|e^0\|.$$

Burada $\delta=\sqrt{\delta_\nu}$ aldığımız taktirde
$|P_\nu^*(f;q;x)-f(x)|\le 2\cdot\omega_{\rho_0}\left(f,\sqrt{\delta_\nu}\right)$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

$f\in C[0,\infty)$ olan bir fonksiyonun, sınırlı $F\subset[0,\infty)$ alt kümesi üzerinde $\alpha\in(0,1]$ için Lipschitz sınıfı $\mathrm{Lip}_M(\alpha)$'ya ait olduğu, $M>0$ sabiti için aşağıdaki eşitsizliğin sağlanmasıyla tanımlanır:

$\forall\, x,y\in[a,b]$ için $|f(x)-f(y)|\le M|x-y|^\alpha$.

Burada M sabiti hem α parametresine hem de f fonksiyonuna bağlıdır.

Teorem 4.2. $f\in Lip_M(\alpha)\cap C[0,\infty)$ ve $\alpha\in(0,1]$ olmak üzere, aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$|P_\nu^*(f;q_\nu;x)-f(x)|\le M\left(\delta^{\alpha/2}+d^\alpha(x,F)\right).$$

Burada M, hem α hem de f'ye bağlı bir sabittir. Ayrıca, $d_\alpha(x,F)$, x noktasının F kümesine olan α'nıncı kuvvetli uzaklığıdır, $d^\alpha(x,F)=inf\{|x-t|^\alpha: t\in F\}$ şeklinde tanımlıdır.

İspat. F kümesinin $[0,\infty)$ aralığı içindeki kapanışı $\overline{F}$ ile gösterilsin. O zaman x'e en yakın nokta olarak $x_0\in\overline{F}$

olmak üzere $d(x,F)=|x-x_0|$ yazılır. Lipschitz koşulu ve P_ν^* operatörünün monotonluğu kullanılarak:

$$|P_\nu^*(f;q_\nu;x)-f(x)|$$

$$\leq P_\nu^*(|f(t)-f(x)|;q_\nu;x)+P_\nu^*(|f(x)-f(x_0)|;q_\nu;x)$$

$$\leq M\{P_\nu^*(|t-x|^\alpha;q_\nu;x)+|x-x_0|\}.$$

Burada Hölder eşitsizliği'nin $p=\frac{1}{\alpha}$, $q=\frac{\alpha}{2-\alpha}$ seçimiyle uygulanması durumunda,

$$|P_\nu^*(f;q_\nu;x)-f(x)|\leq$$

$$M\left\{P_\nu^*((t-x)^2;q_\nu;x)]^{\alpha/2}+|x-x_0|^\alpha\right\}$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Lenze (1999) tarafından tanıtılan Lipschitz tipi maksimal fonksiyon kullanılarak, $P_\nu^*(f;q_\nu;x)$ operatörlerinin yerel doğrudan tahmini aşağıdaki biçimde elde edilmektedir.

$x\in[0,\infty)$, $\alpha\in(0,1]$ olmak üzere;

$$\omega_\alpha(f,x)=\sup_{\substack{t\neq x\\ t\in[0,\infty)}}\frac{|f(t)-f(x)|}{|t-x|^\alpha}. \qquad (8)$$

Teorem 4.3. $\alpha\in(0,1]$ ve $f\in Lip_M(\alpha)$ olmak üzere, aşağıdaki ifade geçerlidir:

δ, daha önce (7) ifadesinde tanımlanan değer olmak üzere,

$$|P_\nu^*(f;q_\nu;x)-f(x)|\leq\omega_\alpha(f,x)\cdot\delta^{\alpha/2}.$$

İspat. Lipschitz-tipi maksimum fonksiyon tanımı ve (8) kullanılarak:

$$|P_\nu^*(f;q_\nu;x)-f(x)|$$

$$\leq P_\nu^*(|f(t)-f(x)|;q_\nu;x)$$

$$\leq\omega_\alpha(f,x)\cdot P_\nu^*(|t-x|^\alpha;q_\nu;x)$$ elde edilir.

Hölder eşitsizliği $p=\frac{1}{\alpha}$, $q=\frac{\alpha}{2-\alpha}$ seçimiyle uygulanırsa:

$$|P_\nu^*(f;q_\nu;x)-f(x)|$$

$$\leq P_n^*(|f(t)-f(x)|;q_n;x)$$

$$\leq\omega_\alpha(f,x)\cdot[P_\nu^*((t-x)^2;q_\nu;x)]^{\alpha/2}=\omega_\alpha(f,x)\cdot\delta^{\alpha/2}$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

5. Operatörün Yerel Yaklaşım özellikleri

Bu bölümde, P_ν^* operatörlerinin yerel (noktasal) yakınsama davranışı, ikinci mertebeden düzgünlük modülü, Peetre K-fonksiyonu ve klasik süreklilik modülü kullanılarak incelenmektedir.

Sınırlı ve sürekli fonksiyonlardan oluşan uzayda $f\in C_B[0,\infty)$ için Peetre K-fonksiyonu şu şekilde tanımlanır:

$$K_2(f;\delta)=inf_{g\in W^2}\|f-g\|+\delta\|g''\|.$$

İkinci mertebeden düzgün süreklilik modülü ise aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$\delta>0$ ve $W^2=\{g\in C_B[0,\infty):g',g''\in C_B[0,\infty)\}$ olmak üzere,

$$\omega_2\left(f;\sqrt{\delta}\right)=sup_{0<h\leq\sqrt{\delta}}\ sup_{x\in[0,\infty)}\ |f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)|.$$

DeVore (1993, s. 177, Teorem 2.4)'te verilen sonuca göre, her $f\in C_B[0,\infty)$için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$C>0$ sabit bir katsayı olmak üzere,

$$K_2(f;\delta)\leq C\cdot\omega_2\left(f;\sqrt{\delta}\right).$$

Burada $f\in C_B[0,\infty)$ ve $\delta>0$ olmak üzere,

$$\omega_2(f,\delta)=\sup_{0<h\leq\delta}\ \sup_{x\in[0,\infty)}|f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)|.$$

Bu bilgilerden hareketle,aşağıda P_ν^*operatörleri için bir yerel doğrudan yakınsama teoremi verilmektedir.

Teorem 5.1. $q\in(0,1)$ ve $f\in C_B[0,\infty)$ olsun. O hâlde, her $x\in(0,\infty)$ için bir $C>0$ sabiti olmak üzere aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$|P_\nu^*(f;q;x)-f(x)|$$

$$\leq C\cdot\omega_2(f,\varphi_\nu)+\omega\left(f,\frac{\mathcal{D}_q(A(1)}{A(1)}\cdot\frac{b_\nu}{[\nu]_q}\right).$$

Burada;

$$\varphi_\nu=\frac{q_\nu\cdot\mathcal{D}_q\big(A(q)\big)+\mathcal{D}_q\big(A(1)\big)}{A(1)}\cdot\frac{b_\nu}{[\nu]_q}$$

$$+\frac{\mathcal{D}_q{}^2(A(1)+\left[\mathcal{D}_q(A(1))\right]^2}{A^2(1)}\cdot\frac{[b]_\nu^2}{[\nu]_q^2}$$

şeklinde alınmaktadır.

İspat. Daha önce tanımlanan P_ν^* operatöründen yararlanarak, aşağıdaki şekilde yeni bir $\tilde{P}_\nu^*$ operatörü tanımlayalım.

$$\tilde{P}_\nu^*(f;q;x)$$

$$= P_\nu^*(f;q;x) - f\left(x + \frac{e_q^{q\cdot\frac{[\nu]_q}{b_\nu}x}\cdot E_q^{-x\cdot\frac{[\nu]_q}{b_\nu}}\cdot D_q(A(1)}{A(1)}\frac{b_\nu}{[\nu]_q}\right)$$

$$+f(x)\,,\ x\in(0,\infty)\,. \qquad (9)$$

Bu $\tilde{P}_\nu^*(f;q;x)$ operatör lineer olduğu için:

$$\tilde{P}_\nu^*(s-x;q;x)=0.$$

$x\in(0,\infty)$ ve $g\in C_B[0,\infty)$ olmak üzere integral kalan terimini içeren Taylor formülü kullanılarak,
$g(s)=g(x)+g'(x)(s-x)+\int_x^s(s-u)g''(u)du$

elde edilir. Buradan,

$$\tilde{P}_\nu^*(g;q;x)=g(x)+\tilde{P}_\nu^*(\int_x^s(s-u)g''(u)du).$$

Daha sonra (9)'dan;

$$|\tilde{P}_\nu^*((g;q;x)-g(x)|$$

$$\le P_\nu^*(\int_x^s(s-u)g''(u)du;q;x)$$

$$+\left|\int_x^{x+\frac{e_q^{q\frac{[\nu]_q x}{b_\nu}}\cdot E_q^{-x\frac{[\nu]_q}{b_\nu}}\cdot D_q(A(1))}{A(1)}\frac{b_\nu}{[\nu]_q}}\left(x+\frac{e_q^{q\frac{[\nu]_q x}{b_\nu}}E_q^{-x\frac{[\nu]_q}{b_\nu}}D_q(A(1))}{A(1)}\cdot\frac{b_\nu}{[\nu]_q}-u\right)g''(u)du\right|$$

$$\le P_\nu^*\left(\left|\int_x^s(s-u)g''(u)du\right|;q;x\right)$$

$$+\int_x^{x+\frac{e_q^{q\frac{[\nu]_q x}{b_\nu}}\cdot E_q^{-x\frac{[\nu]_q}{b_\nu}}\cdot D_q(A(1))}{A(1)}\frac{b_\nu}{[\nu]_q}}\left|x+\frac{e_q^{q\frac{[\nu]_q x}{b_\nu}}E_q^{-x\frac{[\nu]_q}{b_\nu}}D_q(A(1))}{A(1)}\cdot\frac{b_\nu}{[\nu]_q}-u\right||g''(u)|du$$

$$\le\left[P_\nu^*((s-x)^2;q;x)+\left(\frac{e_q^{q\frac{[\nu]_q x}{b_\nu}}E_q^{-x\frac{[\nu]_q}{b_\nu}}D_q(A(1))}{A(1)}\cdot\frac{b_\nu}{[\nu]_q}\right)^2\right]\|g''\|du$$

elde edilir. Sonuç olarak,

$$|\tilde{P}_\nu^*(g;q;x)-g(x)|\le\varphi_\nu\|g''\|. \qquad (10)$$

Buna ek olarak, (1), (2) ve (9) numaralı ifadeler kullanılarak aşağıdaki sonuca ulaşılır.

$$|\tilde{P}_\nu^*(f;q;x)|$$

$$\le P_\nu^*(f;q;x)+2\|f\|$$

$$\le\|f\|P_\nu^*(1;q;x)+2\|f\|$$

$$\le 3\|f\|\,. \qquad (11)$$

Ayrıca, (9), (10) ve (1) ifadeleri birleştirildiğinde, aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$|\tilde{P}_\nu^*(f;q;x)-f(x)|$$

$$\le|\tilde{P}_\nu^*(f-g;q;x)-(f-g)(x)|+|\tilde{P}_\nu^*(g;q;x)-g(x)|$$

$$+\left|f\left(x+\frac{e_q^{\frac{[\nu]_q x}{b_\nu}}E_q^{-\frac{[\nu]_q x}{b_\nu}}D_q(A(1))}{A(1)}\cdot\frac{b_\nu}{[\nu]_q}\right)-f(x)\right|$$

$$\le 4\|f-g\|+\varphi_\nu\|g''\|.$$

Yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafı üzerinde $g\in C_B^2[0,\infty)$ için infimum alınması ve $K_2(f;\delta)\le C\cdot\omega_2\left(f;\sqrt{\delta}\right)$ kullanılmasıyla aşağıdaki sonuca ulaşılır:

$$|P_\nu^*(f;q;x)-f(x)|$$

$$\le C\omega_2(f,\varphi_\nu)+\omega\left(\frac{D_q(A(1))}{A(1)}\cdot\frac{b_\nu}{[\nu]_q}\right).$$

Böylece teoremin ispatı tamamlanmıştır.

6. Sonuçlar ve Tartışma

Bu çalışmada, q-Favard-Szász operatörlerinin Chlodowsky tipi bir genellemesi elde edilmiş ve bu operatörlerin yaklaşım davranışları, ağırlıklı istatistiksel yakınsaklık çerçevesinde incelenmiştir. Korovkin tipi teoremler, süreklilik modülü ve Lipschitz tipi maksimum fonksiyonlar kullanılarak yeni yakınsaklık sonuçları elde edilmiş ve yaklaşım hızı ayrıntılı biçimde sunulmuştur. Ayrıca, Peetre K-fonksiyonu ve ikinci mertebeden düzgünlük modülü aracılığıyla yerel yaklaşık doğrulama özellikleri elde edilmiştir. Bu sonuçlar, klasik yaklaşık doğrulama kuramını q-calculus bağlamında genişletmenin yanı sıra, sınırsız aralıklarda istatistiksel yakınsaklığın daha derinlemesine anlaşılmasına katkıda bulunmaktadır. Bu çalışmada sunulan operatör, pozitif lineer operatörlerin ve onların q-analoglarının araştırılmasında yeni bir yön sunmaktadır.

Bu makalede tanıtılan Chlodowsky tipi q-Favard-Szász operatörleri, yaklaşım yöntemlerinin önemli olduğu çeşitli alanlarda uygulanma potansiyeline sahiptir. Sayısal analizde, bu operatörler özellikle sınırsız aralıklarda diferansiyel ve integral denklemlerin çözümü için etkili yaklaşık doğrulama şemaları kurmak amacıyla kullanılabilir. Matematiksel fizik ve kuantum mekaniği gibi q-calculus'un artan öneme sahip olduğu alanlarda, bu tür operatörler q-Chlodovdeforme edilmiş modeller içeren problemlerin çözümünde ayrıklaştırma ve yaklaşık doğrulama işlemlerine yardımcı olabilir. Ayrıca, sinyal işleme ve veri yaklaşımı gibi alanlarda da, fonksiyonların ayrık verilerden yeniden yapılandırılması için düzgün ve yakınsak operatörlere ihtiyaç duyulduğunda faydalı olabilirler. Uygulamalı matematik ve mühendislikte ise, istatistiksel yaklaşım araçlarıyla denge ve yakınsaklık kontrolü gerektiren modelleme süreçlerinde katkı sağlayabilirler. Klasik olmayan ve ağırlıklı yakınsaklık ortamlarını yönetebilme esneklikleri sayesinde, hesaplamalı matematik ve matematiksel modelleme alanlarında gelişmiş yaklaşım çerçeveleri için uygun adaylardır.

Bu çalışmada sunulan sonuçlar, gelecekteki araştırmalar için birçok olası yönü ortaya koymaktadır. Doğal bir ilerleme olarak, Chlodowsky tipi q-Favard-Szász operatörlerinin yaklaşım özelliklerinin ağırlıklı Orlicz ya da Sobolev uzayları gibi farklı fonksiyonel uzaylarda araştırılması önerilebilir. Ayrıca, (p,q)-calculus veya kesirli q-türevler kullanılarak benzer yapılar kurmak, daha genel davranışların yakalanması açısından umut verici bir genişleme olacaktır. Bunun yanında, burada incelenen istatistiksel yakınsaklık özellikleri, $\alpha\beta$-istatistiksel ya da seyrek (lacunary) istatistiksel yakınsaklık gibi alternatif toplamlanabilirlik yöntemleri dahil edilerek de genişletilebilir. Uygulama açısından bakıldığında ise, bu operatörlerin sayısal olarak uygulanması ve diferansiyel ya da integral denklemlerin çözümündeki performanslarının değerlendirilmesi, onların pratik önemini artırabilir.

Etik Standartlar Bildirgesi

Yazar tüm etik standartlara uyduğunu beyan eder.

Yazarlık Katkı Beyanı

Yazar 1: Kaynaklar, Araştırma, Deney, Yazma – orijinal taslak Görselleştirme, Yazma – orijinal taslak

Çıkar Çatışması Beyanı

Yazarların bu makalenin içeriğiyle ilgili olarak beyan edecekleri hiçbir çıkar çatışması yoktur.

Verilerin Kullanılabilirliği

Bu çalışma sırasında oluşturulan veya analiz edilen tüm veriler, yayınlanan bu makaleye dahil edilmiştir.

7. Kaynaklar

Atakut, Ç., Büyükyazıcı, İ., 2011. The rate of convergence of the q-analogue of Favard Szász type operators. *Journal of Computational Analysis and Applications*, **13**(4), 673–682.

Atakut, Ç., Tanberkan, H., Serenbay, S.K., Büyükyazıcı, İ., 2014. Approximation by Chlodowsky type Jakimovski-Leviatan operators. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **259**, 153–163. https://doi.org/10.1016/j.cam.2013.04.021

Başcanbaz-Tunca, G., Erençin, A., Taşdelen, F., 2014. On a sequence of Kantorovich type operators via Riemann type q-integral. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*,**51**(2),303–315. http://doi.org/10.4134/bkms.2014.51.2.303

Büyükyazıcı, İ., Atakut, Ç., 2010. On Stancu type generalization of q-Baskakov operators. *Mathematical and Computer Modelling*, **52**(5), 752–759. https://doi.org/10.1016/j.mcm.2010.05.004

Chlodowsky, I., 1937. Sur le développement des fonctions définies dans un intervalle infini en séries de polynômes de M. S. Bernstein. *Compositio Mathematica*, **4**, 380–393.

Dalmanoğlu, Ö., Doğru, O., 2010. On statistical approximation properties of Kantorovich type q-Bernstein operators. *Mathematical and Computer Modelling*,**52**,760–771. https://doi.org/10.1016/j.mcm.2010.05.005

DeVore, R.A., Lorentz, G.G., 1993. *Constructive Approximation*. Springer, Berlin.

Finta, Z., Gupta, V., 2009. Approximation by q-Durrmeyer operators. *Journal of Applied Mathematics and Computing*,**29**(1–2),401–415. https://doi.org/10.1007/s12190-008-0141-5

Gadjiev, A.D., Orhan, C., 2002. Some approximation properties via statistical convergence. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, **32**, 129–138.

Gupta, V., Radu, C., 2009. Statistical approximation properties of q-Baskakov-Kantorovich operators. *Central European Journal of Mathematics*, **7**(4), 809–818. https://doi.org/10.2478/s11533-009-0055-y

Jakimovski, A., Leviatan, D., 1969. Generalized Szász operators for the approximation in the infinite interval. *Mathematica (Cluj)*, **11**(34), 97–103.

Kac, V., Cheung, P., 2002. *Quantum Calculus*. Springer.

Karabıyık, Ü., Ayık, A., Karaisa, A., 2024. Approximation Properties of Chlodowsky-Type Two-Dimensional Bernstein Operators Based on (p,q)-Integers. *Symmetry*,**16**(11),1503. https://doi.org/10.3390/sym16111503

Karahan, D., Acar, E., 2023. Nonlinear Approximation by q-Favard-Szász-Mirakjan Operators of Max-Product Kind. *Communications in Advanced Mathematical Sciences*,**6**(2),104–114. https://doi.org/10.33434/cams.1242905

Karaisa, A., 2016. Approximation by Durrmeyer type Jakimovski-Leviatan operators. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **39**(9), 2401–2410. https://doi.org/10.1002/mma.3650

Karakaya, V., Karaisa, A., 2015. Korovkin type approximation theorems for weighted $\alpha\beta$-statistical convergence. *Bulletin of Mathematical Sciences*,**5**(2),159–169. https://doi.org/10.1007/s13373-015-0065-y

Lenze, B., 1990. Bernstein-Baskakov-Kantorovic operators and Lipschitz-type maximal functions. *Colloquium Mathematicum Societatis János Bolyai*, **58**, 245–256.

Mursaleen, M., Khan, A., 2013. Statistical approximation properties of modified q-Stancu-Beta operators. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, **36**(3), 683–690.

Mursaleen, M., Alotaibi, A., 2011. Statistical lacunary summability and a Korovkin type approximation theorem. *Annali dell'Università di Ferrara*, **57**(2), 373–381. https://doi.org/10.1007/s11565-011-0122-8

Örkçü, M., Doğru, O., 2011. Weighted statistical approximation by Kantorovich type q-Szász-Mirakjan operators. *Applied Mathematics and Computation*,**217**(20),7913–7919. https://doi.org/10.1016/j.amc.2011.03.009

Phillips, G.M., 1997. Bernstein polynomials based on the q-integers. *Annals of Numerical Mathematics*, **4**(1–4), 511–518.

Radu, C., 2008. Statistical approximation properties of Kantorovich operators based on q-integers. *Creative Mathematics and Informatics*, **17**, 75–84.

Samantaray, S., 2002. Biochemical responses of Cr–tolerant and Cr–Sensitive mung bean cultivars grown on varying levels of chromium. *Chemosphere*, **47**, 1065–1072.

Stypinski, Z., 1974. Theorem of Voronovskaya for Szász-Chlodowsky operators. *Approximatio Commentarii Mathematici*, **1**, 133–137.

Usta, F., İlkhan, M., Kara, E.E., 2021. Numerical solution of Volterra integral equations via Szász-Mirakyan approximation method. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **44**(9), 7491–7500. https://doi.org/10.1002/mma.6289